ЛИТЕРАТУРА

1. *Grigoriev D.* Analogy of Bruhat decomposition for the closure of a cone of Chevalley group of a classical serie // Soviet Math. Dokl. Vol. 23. N. 2. 1981. P 393-397.

2. *Malaschonok G.I.* Effective Matrix Methods in Commutative Domains // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Springer, Berlin. 2000. P. 506-517.

3. *Malaschonok G. I.* Fast Generalized Bruhat Decomposition // Computer Algebra in Scientific Computing, LNCS 6244, Springer, Berlin. 2010. P. 194-202.

4. *G.I.Malaschonok* Generalized Bruhat decomposition in commutative domains /in book: Computer Algebra in Scientific Computing. CASC'2013. LNCS 8136, Springer, Heidelberg, 2013, pp.231-242.

Acknowledgements: This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 12-07-00755-a).


Малашонок Г.И. ТОЧНОЕ ТРЕУГОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Основным результатом, который представлен в этой работе, является существование в коммутативной области $R$ матрицы треугольного разложения, которая имеет вид: $A=PLDUQ$, где $P$ и $Q$ – перестановочные матрицы, $L$ и $PLP^T$ – нижние треугольные матрицы над $R$, $U$ и $Q^TUQ$ – верхние треугольные матрицы над $R$, $D=\mathrm{diag}(d_1^{-1},d_2^{-1},..,d_r^{-1},0,..,0)$ – диагональная матрица ранга $r$, $d_i\in R\backslash\{0\}$, $i=1,\ldots,r$.


*Key words*: треугольное разложение матрицы; алгоритм в коммутативных областях.

УДК 517.98

# THE LAPLACE TRANSFORM METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAYED ARGUMENT

© N.A. Malashonok

*Key words*: Laplace transform method; differential equations with delayed argument.

The Laplace transform method is used for differential equations with delayed argument. There is constructed an algorithm, which is symbolic-numerical. The numerical component concerns a representation of functions, involved into the process by some kind of series.

There is a class of physical problems, which is associated with action of some kind of complementary forces - forces which are involved at various not initial time moments. Such problems frequently lead to the so called differential equations with delayed argument. Different ways of dealing with such equations exist. Applications of the Laplace transform method are well known. However there are some facts which prevent using this method in a symbolic way. Some difficulties, for example, are connected with a form of the solution of the Laplace image of the input differential equations. Only concrete kinds of equations may be solved entirely symbolically.

We restrict ourselves to the consideration of one equation, but the method works similarly with systems of equations of such type.

All functions of the argument $t$ are supposed to satisfy the conditions for existing of their Laplace transform, and they equal zero for negative $t$. The points $t_k, t_{k-1}<t_k$, are taken in the set of $t, t\geqslant 0$. Consider an equation

$$x^{(n)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}x^{(n-j)}(t-t_k)=f(t), \tag{1}$$

with initial conditions $x^{(n-j)}(0)=x_0^{(n-j}), j=1, ldots, n$. The function $f(t)$ in the right-hand part is in general composite. We may consider for it the same partition points $t_k$. The unknown function $x(t)$ and $f(t)$ satisfy the properties, put on above, so the equation (1) may be written using the Heaviside function $\eta(t)$ in the following way:

$$x^{(n)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}\eta(t-t_k)x^{(n-j)}(t-t_k)=f(t), \tag{2}$$

$f(t)$ is also written by means of Heaviside function. It permits to write symbolically the Laplace image of the equation (2):

$$\left(p^n+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}p^{n-j}\right)X(p)=\sum_{j=1}^{n}p^{j-1}x_0^{(n-j)}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}p^{j-1}x_0^{(n-j)}e^{-pt_k}+F(p), \tag{3}$$

where $X(p)$ and $F(p)$ are the Laplace images of $x(t)$ and $f(t)$), correspondingly, and $F(p)$ in general is also a sum of exponents with polynomial coefficients.

Denote

$$Q(p)=\sum_{j=1}^{n}p^{j-1}x_0^{(n-j)}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}p^{j-1}x_0^{(n-j)}e^{-pt_k}+F(p),$$

$$D(p)=p^n+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}a_{jk}e^{-pt_k}p^{n-j},$$

then

$$X(p)=\frac{Q(p)}{D(p)}. \tag{4}$$

The numerical component of the algorithm depends on the representation of the expression (4) into the series of exponents of a special kind and taking the partial sum, sufficient to obtain the desired accuracy for the solution of the initial differential equation. We will not describe the details of such estimations in this article an will consider an example.

*Example*

Consider the equation

$$x''+2\eta(t-1)x'(t-1)-\eta(t-2)x'(t-2)+\eta(t-3)x'(t-3)+\eta(t-3)x(t-3)=f(t), \tag{5}$$

where $f(t)=t^2(\eta(t)-\eta(t-1))+t\eta(t-1)$.

The Laplace image of the equation:

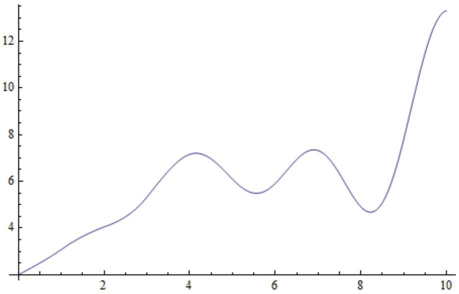
$$\left(p^2+2pe^{-p}-pe^{-2p}+pe^{-3p}+e^{-3p}\right)X=px_0+x_0^1+2e^{-p}x_0-e^{-2p}x_0+e^{-3p}x_0+F, \tag{6}$$

where $F=2/p^3-(e^{-p}(2+p))/p^3$.

The solution of (6) is the following

$$\frac{-2e^{-p}+2-e^{-p}p+2p^3e^{-3p}-2e^{-2p}p^3+4e^{-p}p^3+p^3+2p^4}{p^3(e^{-3p}+pe^{-3p}-e^{-2p}p+2e^{-p})p+p^2)}. \tag{7}$$

We expand (7) by the exponents $e^{-kp}$ in some way, and taking 10 terms of the series we obtain a solution we sufficiently high accuracy. It satisfies the initial conditions and the given equation with correspondent precision. We omit the discussion of these estimations and produce the plot of the solution.




Acknowledgements: Supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR): grant 13-01-00952-a, Goszadan. Minobr.: 1.3445.2011.

Малашонок Н.А. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Преобразование Лапласа используется для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Построен символьно-численный алгоритм. Численная составляющая относится к представлению функции, вовлеченной в процесс, в виде некоторого ряда.

*Ключевые слова:* преобразования Лапласа; дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

УДК 517.529

## МЕТОД TEST-УРАВНЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **В.В. Малыгина**

*Ключевые слова*: разностное уравнение; последействие; экспоненциальная устойчивость; равномерная устойчивость.

Предлагается метод исследования устойчивости решений линейных скалярных разностных уравнений с последействием. Семейству уравнений исследуемого класса ставится в соответствие test-уравнение, изучение свойств которого позволяет получить эффективное описание области устойчивости всех уравнений семейства.

В работах [1–3] предложен метод исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), суть которого состоит в том, что об асимптотическом поведении решений семейства ФДУ можно судить по поведению одного, специально построенного уравнения (*test-уравнения*). Оказалось, что тот же метод можно применить к исследованию разностных уравнений. Как уже не раз отмечалось [4–6], разностные уравнения по своим свойствам близки к ФДУ.

Рассмотрим следующий класс разностных уравнений:

$$x(n+1) - x(n) = a_0 x(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k x(n - h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \geqslant 0$, $0 \leqslant h_k(n) \leqslant H_k$ для всех $k = \overline{1,n}$.

Пусть в уравнении (1) фиксирован набор коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и границ запаздываний $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Назовем *семейством* (1) множество уравнений вида (1) при